Informatique Appliquée au Calcul Scientifique 1
Séance 7
Méthode du point fixe

Table des matières

Cours B MOREAU

I. Définition

Un grand nombre de méthodes numériques de $f(x) = 0$ ont pour base l'écriture sous forme d'équation de point fixe. On remplace ainsi l'équation :

$$f(x) = 0$$

par l'équation de point fixe :

$$g(x) = x$$

Remarque :
Étant donnée f, il y a plusieurs choix possibles pour g.
Exemple :
Pour $f(x) = x^2 - a$.

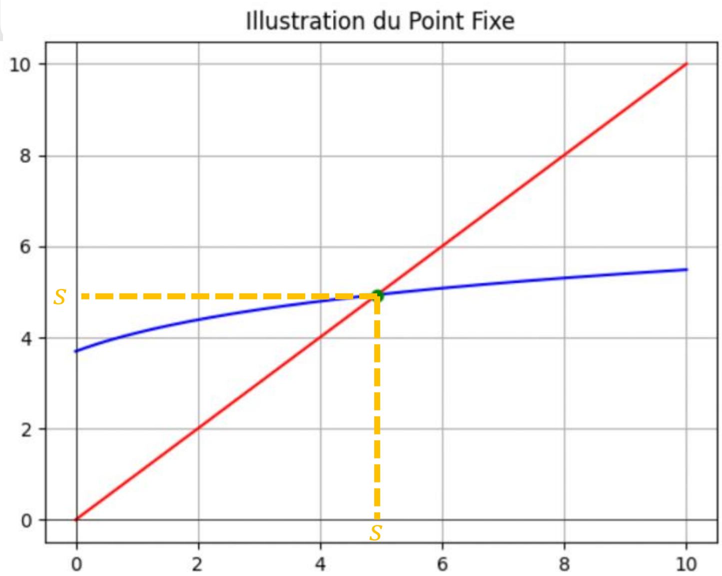
$$f(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - a = 0 \Leftrightarrow x^2 + x - a = x \qquad (1)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x}) = x \qquad (2)$$

Ainsi, on pourrait poser $g(x) = x^2 + x - a$ ou $g(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$.
Quel est alors le bon choix pour g ? Il sera nécessaire de prendre une fonction g qui soit « contractante ». Nous verrons ça dans la suite de ce cours.

Définition :
Un point fixe d'une fonction g est un point s tel que $g(s) = s$. Autrement dit, c'est un point qui est invariant sous l'application de g.

Interprétation géométrique :
s point fixe de g est l'abscisse (et l'ordonnée) du point d'intersection de la courge $y = g(x)$ et la première bissectrice $y = x$.

Cours R MOREAU



II. Applications contractantes

Une application g est contractante ou k-contractante sur un intervalle I lorsque :

- $g(I) \subset I$;
- il existe une constante réel k vérifiant $0 \leq k < 1$ telle que, pour tout x et y dans I,

$$|g(y) - g(x)| \leq k|y - x|$$

Remarque :

Pour vérifier que f est contractante, on étudie la valeur absolue de f' sur I, il suffit de montrer que cette valeur absolue est strictement inférieure à un réel $k < 1$ pour conclure. On fait donc un tableau de variation de la fonction f' sur I.

Exercice 1 :

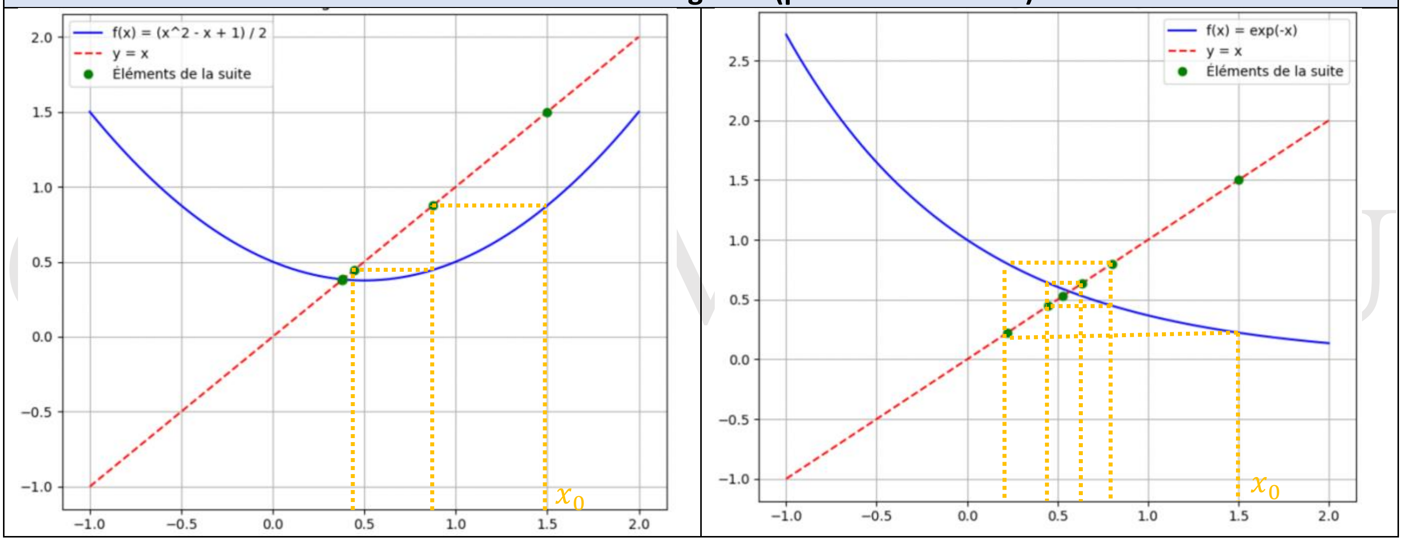
a. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ est contractante sur l'intervalle $[1, a]$.

b. Vérifier que $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est contractante sur $[0, 1]$.

III. Théorème du point fixe

- Si g est k-contractante sur un intervalle I alors elle admet un unique point fixe α dans I.
- Pour tout x_0 dans I, la suite (x_n) définie par $x_{n+1} = g(x_n)$ est convergente et sa limite est le point fixe α.
- L'erreur d'approximation de α par x_n est majorée par : $|x_n - \alpha| \leq \frac{k^n}{1-k}|x_1 - x_0|$.

Différents cas de convergence (point fixe attractif)



Classification des points fixes dans $\mathbb{R}$

On considère une fonction $f: I \longrightarrow I$ de classe $\mathcal{C}^1$ (dérivable) où I est un segment de $\mathbb{R}$. Alors on distingue 3 cas :

1. Si $|f'(a)| < 1$, alors a est attractif.
2. Si $|f'(a)| > 1$, alors a est répulsif.
3. Si $|f'(a)| = 1$, on ne peut rien dire.

IV. L'algorithme

La méthode itérative consiste à commencer par une valeur initiale x_0 et à appliquer la fonction f de manière répétée pour générer une suite $x_{n+1} = f(x_n)$ qui converge vers le point fixe, sous certaines conditions de f (voir plus haut).

Pseudo-code pour l'Algorithme du Point Fixe

```
Fonction point_fixe(f, x0, tolérance, max_itérations):
    Pour i de 0 à max_itérations:
        x1 = f(x0)
```

```
        si abs(x1 - x0) < tolérance:
            retourne x1
        x0 = x1
    Afficher "la convergence n'a pas été atteinte"
```

V. TP3 – Application du point fixe

1. Programmer l'algorithme du point fixe pour les trois fonctions suivantes :
$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $f_2(x) = 1 - x^3$ et $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en vous aidant du pseudocode donné.
Vous vérifierez si les applications sont contractantes et choisirez le premier élément de votre suite.
Vous créerez une fonction `point_fixe` prenant comme paramètres la fonction, le point de départ, la tolérance et le maximum d'itérations.

2. Comment utiliser l'algorithme du point fixe pour calculer toutes les racines de l ' équation $1 + 3x - x^3 = 0$?

Cours B MOREAU

Correction
Exercice 1 :

a. Vérifier que $f(x) = \frac{1}{2}(x + \frac{a}{x})$ est contractante sur l'intervalle $[1, a]$.

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right)$$
$$f''(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{2a}{x^3}\right) = \frac{a}{x^3} > 0\ sur\ [1, a].$$

Ainsi, le maximum de $f'(x)$ sur $[1, a]$ est donc $\frac{a}{a^3} = \frac{1}{a^2} < 1$.

On a donc $f'(x) \leq \frac{1}{a^2}\ \forall x \in [1, a]$.

De plus,

$$f'(x) = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{a}{x^2}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2 - a}{x^2}\right)$$

Sur $[1, \sqrt{a}]$, $f'(x) < 0$ et sur $[\sqrt{a}, a]$, $f'(x) > 0$.

x	1		$\sqrt{a}$		a
signe de $f''(x)$		$-$		$+$	
Variations de f'	$\frac{1}{2}(1+a)$	$\nearrow$	$\boxed{\sqrt{a}}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{a})$

$\frac{1}{2}(1 + a) < a\ (étude\ du\ signe\ de\ \frac{1}{2}(1 + a) - a\ facile)$

Ainsi $f([1, a]) \subset [1, a]$.

Cours B MOREAU

b. Vérifier que $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$ est contractante sur $[0, 1]$.

Pour l'inclusion, c'est facile…

$$g'(x) = \frac{-2x}{(1 + x^2)^2}$$
$$g''(x) = \frac{-2(1 + x^2)^2 + 2x \times 4x(1 + x^2)}{(1 + x^2)^4} = \frac{-2(1 + x^2) + 8x^2}{(1 + x^2)^3} = \frac{6x^2 - 2}{(1 + x^2)^3} = \frac{2(3x^2 - 1)}{(1 + x^2)^3}$$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{3}}$		1
signe de $g''(x)$		$-$		$+$	
Variations de g'	0	$\searrow$	$\boxed{\frac{-3\sqrt{3}}{8}}$	$\nearrow$	$-\frac{1}{2}$

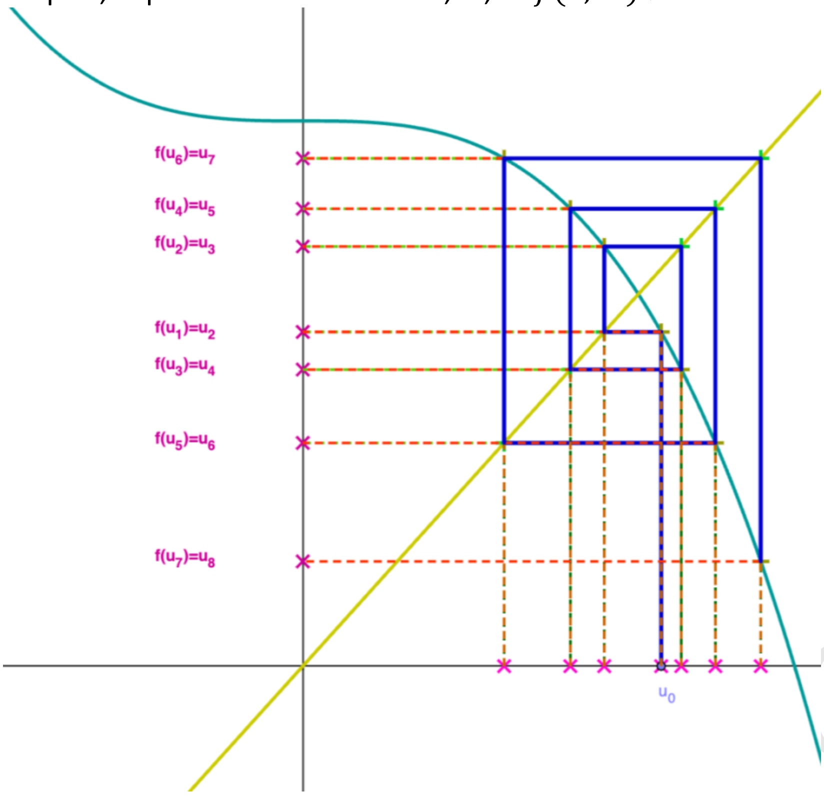
On a donc : $|g'(x)| \leq \frac{-3\sqrt{3}}{8} < 1, \forall x \in [0, 1]$.

TP3

1. Programmer l'algorithme du point fixe pour les trois fonctions suivantes :
$f_1(x) = \frac{1}{2}x + 1$, $f_2(x) = 1 - x^3$ et $f_3(x) = \frac{1}{1+x^2}$ en vous aidant du pseudocode donné.
Vous vérifierez si les applications sont contractantes et choisirez le premier élément de votre suite.
Vous créerez une fonction point_fixe prenant comme paramètre la fonction, le point de départ, la tolérance et le maximum d'itérations.

f1 sur [1 ; 3].
f2 sur [0 ; 1].
f3 sur [0 ; 1].

Pour avoir $|f'(x)| < 1$, il faut que $x \in [-\frac{1}{\sqrt{3}}; \frac{1}{\sqrt{3}}]$, on aura un problème sur l'inclusion.
De plus, le point fixe est environ 0,68, et $f(0{,}68) > 1$. On se retrouve avec un point fixe répulsif.



OREAU

Retour de la fonction :

```
Le point fixe trouvé pour f1 est 1.9999999403953552
Le point fixe trouvé pour f2 est 123
Le point fixe trouvé pour f3 est 0.6823277676232496
```

2. Comment utiliser l'algorithme du point fixe pour calculer toutes les racines de l ' équation $1 + 3x - x^3 = 0$?

Pour utiliser l'algorithme du point fixe pour trouver les racines de l'équation $1 + 3x - x^3 = 0$, nous devons reformuler l'équation de manière à isoler xxx sur un côté, ce qui nous donne une fonction $g(x)$ telle que $x = g(x)$. Ensuite, nous pouvons appliquer l'algorithme du point fixe pour chaque racine potentielle.
Plusieurs fonctions sont envisageables :

$$x = \frac{1}{3}(x^3 - 1) \qquad x = (1 + 3x)^{1/3} \qquad x = \frac{1}{x^2 - 3} \qquad x = x^3 - 2x - 1$$

Il est essentiel de choisir une forme qui respecte les conditions de convergence de la méthode du point fixe (| $g'(x)$ |< 1).

Étude de f pour le nombre de racines et leur localisation :

$$f(x) = 1 + 3x - x^3$$
$$f'(x) = -2x^2 + 3$$

x	0	$\frac{-\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$
signe de $g''(x)$	$-$	$+$	$-$
Variations de g'	$+\infty$ ↘	$4,07$	↘

On a donc 3 racines.
On peut les localiser assez aisément vers -2, 0 et 2.

```
Racine trouvée : 1.8793852181757047 en commençant par 0 avec g(x) = g1
Racine trouvée : (1.8793852391635641+1.180032421418045e-08j) en commençant par -
2 avec g(x) = g1
Racine trouvée : 1.8793852727786222 en commençant par 2 avec g(x) = g1
Racine trouvée : -0.347296350628396 en commençant par 0 avec g(x) = g2
Racine trouvée : -0.3472963611550378 en commençant par -2 avec g(x) = g2
Racine trouvée : -0.3472963611550378 en commençant par 2 avec g(x) = g2
Racine trouvée : -0.34729635038044615 en commençant par 0 avec g(x) = g4
```

Pb pour trouver la racine de -2….

Mais on peut utiliser la dicho…

```
Racine trouvée : -1.5320889353752136
```

Cours B MOREAU